Egészértékű programozás, bináris egészértékű programozás

Dr. Kövér György

Egészérték programozás

A lineáris programozás normálfeladatát a következképp fogalmazuk meg:

maximalizálandó $z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x},$ célfüggvény, feltéve hogy

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}.$$

ahol $\boldsymbol{c}^T = [c_1, \ c_2, ..., c_n], \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}.$

A gyakorlatból származó feladatok egy részében a változók kizárólag egész értékeket vehetnek fel. Az egészérték feladatot a lineáris programozás normálfeladata alapján írhatjuk fel:

maximalizálandó $z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x},$ célfüggvény, feltéve hogy

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad x_i \; egész, \; i = 1, 2, ..., n$$
$$\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}.$$

A változók egészértékségét a változók teljes körére,vagy csak egy részére is elírhatjuk.
A fejezet további részében a lináris programozás normálfeladatára folytonos lineáris programozási feladatként (folytonos lp) hivatkozunk.

Az egészérték feladat jelentségét a következ két példával világítjuk meg. Ha arról kell döntenünk , hogy a nyereséges termelés érdekében hány gépet kell üzembe állítanunk, akkor az 1.4 darab nem fogadható el optimális megoldásként. Más alkalommal arról kell döntenünk, hogy hány darab 24 férhelyes állattartó blokkot telepítsünk adott korcsoportú sertéseink számára. Természetesen nem fogadható el a 0 darab állattartó blokk megoldásként, ha a lineáris programozási feladat megoldására használt szimplex módszer 0.15 darab állattartó blokkot javasol, mint optimális megoldást. Vagy nem telepítünk álattartó blokkot egyáltalán - egyúttal lemondunk a teljes sertéstartó tevékenységünkrl-, vagy a blokk kapacitásának egy részét kihasználatlanul hagyjuk és a törtmegoldás által elméletileg lehetségesnek tartott értéknél valamivel gazdaságtalabbul üzemeltetjük az állattartó telepünket.

Az egészérték programozási feladat megoldása a Gomory vágás módszerrel

Mieltt a Gomory vágás módszerét ismertetnénk, példákon keresztül bemutatjuk, hogy a folytonos lineáris programozási feladat megoldásának kerekítésével nem feltétlenül jutunk el optimális egészérték megoldáshoz. Még az is megeshet, hogy a kerekítés után nem is megengedett megoldást kapunk.

Legyen a feladatunk a következ:

Feltételrendszer:

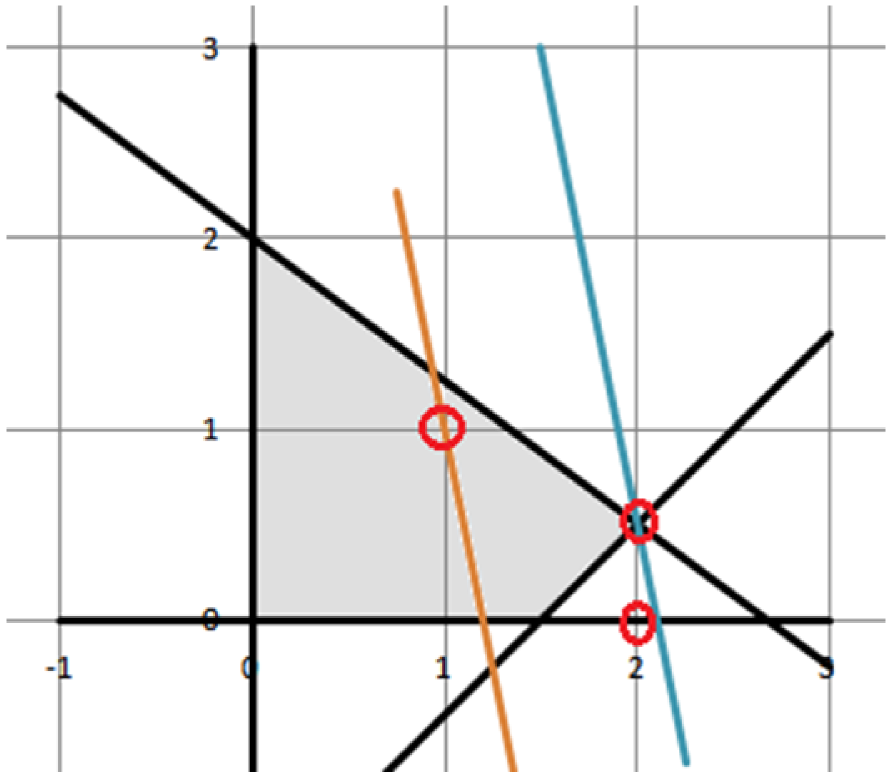
$$x_1 - x_2 \le \frac{3}{2},$$
$$x_2 + \frac{3}{4} \cdot x_1 \le 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, \quad x_2 \quad \textit{egész}$$

Maximalizálandó célfüggvény:

$$z = 5 \cdot x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

A változók egészértéksége mellett maximalizáljuk a célfüggvényt!

A megoldást grafikusan is szemléltethetjük, hiszen a feladatunk kétdimenziós.



A folytonos lp feladat célfüggvényének maximális értéke 10,5 a megengedett tartomány (2,1/2) csúcspontjában. Ha az egészérték programozási feladat megoldását kerekítéssel szeretnénk megkapni, akkor a (2,0) pont adódik. A (2,0) pont nem része a megengedett tartománynak. Az ábrán jelöltük a megengedett tartományon belüli legkedvezbb rácspontot (1,1), ahol a célfüggvény értéke 6.

Tekintsük a következ feladatot.

Feltételrendszer:

$$x_1 \le 3,$$
$$\frac{1}{9} \cdot x_1 + x_2 \le 3,$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, \quad x_2 \quad egész$$

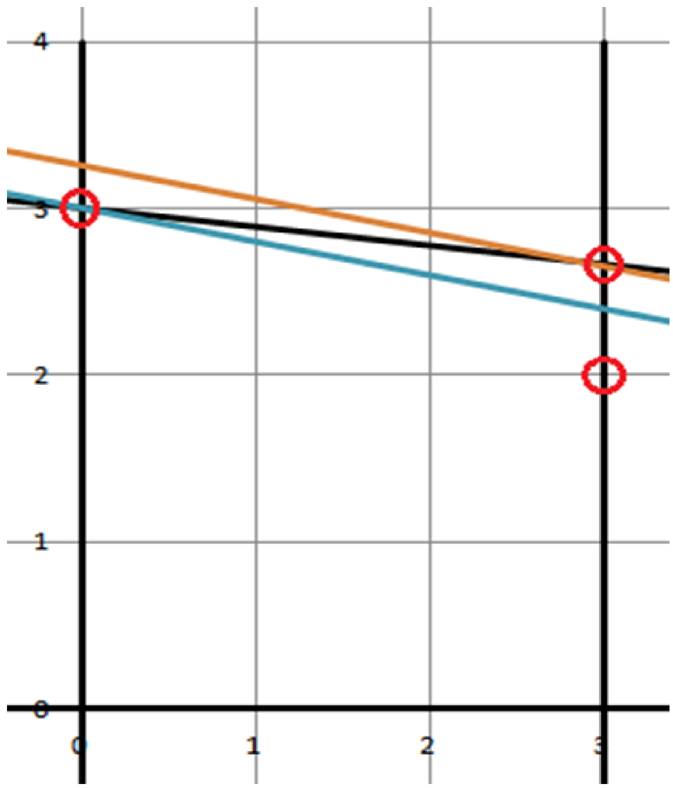
Maximalizálandó célfüggvény:

$z = \frac{1}{5} \cdot x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Amint a következ ábrán megfigyelhetjük, a folytonos lineáris programozási feladat optimális megoldása:

$x_1 = 3,$

$x_2 = \frac{8}{3}$



A célfüggvény értéke

$$z = 3 \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{3} = \frac{49}{15}.$$

A legközelebbi egész koordinátákkal rendelkez rácspont a megengedett tartományban:

$x_1 = 3, x_2 = 2.$

De a legközelebbi rácspont nyilvánvalóan nem lehet az optimális megoldás, vagyis a legnagyobb célfüggvényérték megoldás.

A célfüggvény értéke

$z = 3 \cdot \frac{1}{5} + 2 = \frac{39}{5}.$

Az ábráról leolvasható, hogy az optimális egészérték megoldás:

$x_1 = 1, x_2 = 3.$

Ebben az esetben a célfüggvény értéke:

$z = 0 \cdot 3 + 3 = \frac{45}{15}.$

A Gomory féle vágás módszere új, ún. "vágási" feltételt vezet a feltételrendszerbe, amely garantálja, hogy a folytonos lineáris programozási feladat optimális, nem egészérték megoldása a vágás végrehajtása után már nem lesz megengedett megoldás. Ugyanakkor a megengedett megoldások eredeti halmazából egész érték megoldás nem kerül ki.

A Gomory féle vágási feltétel bevezetésére azt követen kerül sor, hogy az egészérték programozási feladathoz tartozó folytonos lineáris programozási feladatot megoldjuk. Ha az optimális megoldás egészérték, akkor nincs további teend.
Amennyiben nem minden változó egészérték, akkor egy vágási feltételt illesztünk a szimplex táblába.

A lineáris programozási feladat optimális megoldást tartalmazó szimplex táblája a következ alakban írható fel:

	$\boldsymbol{u_1}^{\boldsymbol{T}}$	$\boldsymbol{x_2}^{\boldsymbol{T}}$	
$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{A_{11}}^{\boldsymbol{-1}}$	$\boldsymbol{A_{11}}^{\boldsymbol{-1}} \boldsymbol{A_{12}}$	$\boldsymbol{A_{11}}^{\boldsymbol{-1}} \boldsymbol{b_1}$
$\boldsymbol{u_2}$			

A Gomory vágás szempontjából érdektelen részeket most üresen hagytuk.

A Gomory vágási feltételeket a következképp fogalmazzuk meg:

$$\left(\boldsymbol{A_{11}}^{-1} - \left[\boldsymbol{A_{11}}^{-1}\right]\right)\boldsymbol{u_1} + \left(\boldsymbol{A_{11}}^{-1}\boldsymbol{A_{12}} - \left[\boldsymbol{A_{11}}^{-1}\boldsymbol{A_{12}} - \left[\boldsymbol{A_{11}}^{-1}\boldsymbol{A_{12}}\right]\right]\right)\boldsymbol{x_2} \geq \boldsymbol{A_{11}}^{-1}\boldsymbol{b_1} - \left[\boldsymbol{A_{11}}^{-1}\boldsymbol{b_1}\right]$$

A vágási feltételt úgy értelmezhetjük, hogy keressük $\mathbf{u_1}$ és $\mathbf{x_2}$ értékeit, melyekre az egyenltlenségrendszer jobboldala $\mathbf{x_1}$ értékének a törtrészénél nagyobb, vagy egyenl. Így a jelenlegi optimális megoldást biztosan kizárjuk az elfogadható megoldások halmazából.
Az új vágási feltételt az $\mathbf{x_1}$ vektor egy nem egészérték elemére írjuk fel. A törtrész mindig pozitív.
A fenti vágási feltételt minusz egyel való szorzás után illesztjük a szimplex táblába. Így $\leq$ jellegű feltételt kapunk, a szimplex táblázat jobb oldali oszlopába negatív érték kerül. Ez a szimplex táblázat olyan megoldást tartalmaz, amely nem elfogadható, hiszen sem a primál, sem a duál változók értéke nem lehet negatív.
A megengedett megoldás elállítására a korábban ismertetett **duálszimplex** módszert alkalmazzuk. Amennyiben a megoldásra vonatkozó egészértékség feltétele nem teljesül, úgy addig illesztünk be további vágási feltételeket, amíg az egészértékség feltétele nem teljesül.

A vágási feltétel bevezetésének grafikus szemléltetése

Grafikusan szemléltetjük a vágási feltétel bevezetését az elz feladatunk segítségével.

Feltételrendszer:

$$x_1 \leq 3,$$
$$\frac{1}{9} \cdot x_1 + x_2 \leq 3,$$
$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \;\; \textit{egész}$$

Maximalizálandó célfüggvény:

$$z = \frac{1}{5} \cdot x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Els lépésként a szimplex módszer alkalmazásával megoldjuk az egészérték feladathoz tartozó folytonos lineáris programozási feladatot.

Az induló táblázat:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 1 & 0 & 3 \\ u_2 & \frac{1}{9} & 1 & 3 \\ z & \frac{1}{5} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel az induló táblázat nem optimális megoldást tartalmaz, elvégezzük az x_1-u_1 elemi bázistranszformációt.

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & x_2 & b \\ x_1 & 1 & 0 & 3 \\ u_2 & -\frac{1}{9} & 1 & \frac{8}{3} \\ z & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

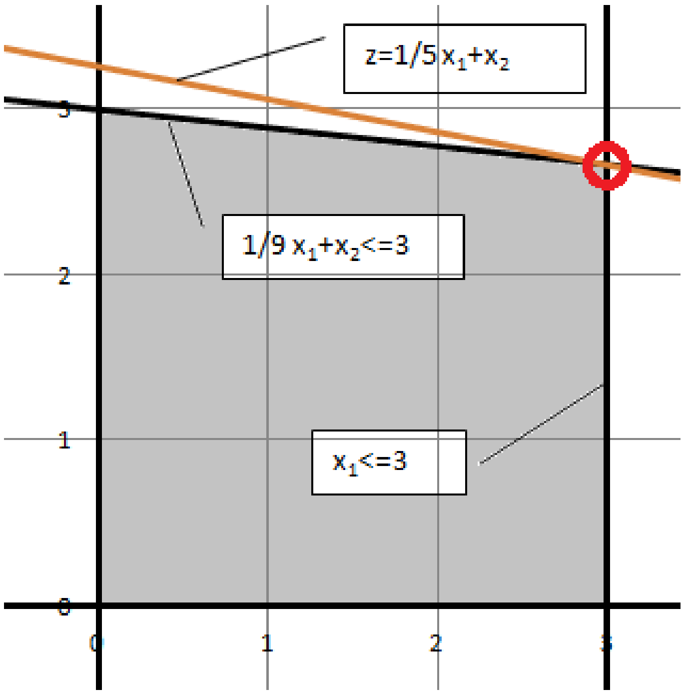
Az els transzformáció nem eredményezet optimális megoldást, elvégezzük az x_2-u_2 elemi bázistranszformációt.

$$\begin{bmatrix} 2 & u_1 & u_2 & b \\ x_1 & 1 & 0 & 3 \\ x_2 & -\frac{1}{9} & 1 & \frac{8}{3} \\ z & -\frac{4}{45} & -1 & -\frac{49}{15} \end{bmatrix}$$

A második transzformációt követen a folytonos lp optimális, de nem egészérték megoldásáhozhoz jutunk.

$$x_1 = 3,\ x_2 = \frac{8}{3},\ z = \frac{49}{15}$$

A megengedett megoldások halmazát és az optimális megoldást a következ ábrán tekinthetjük meg:

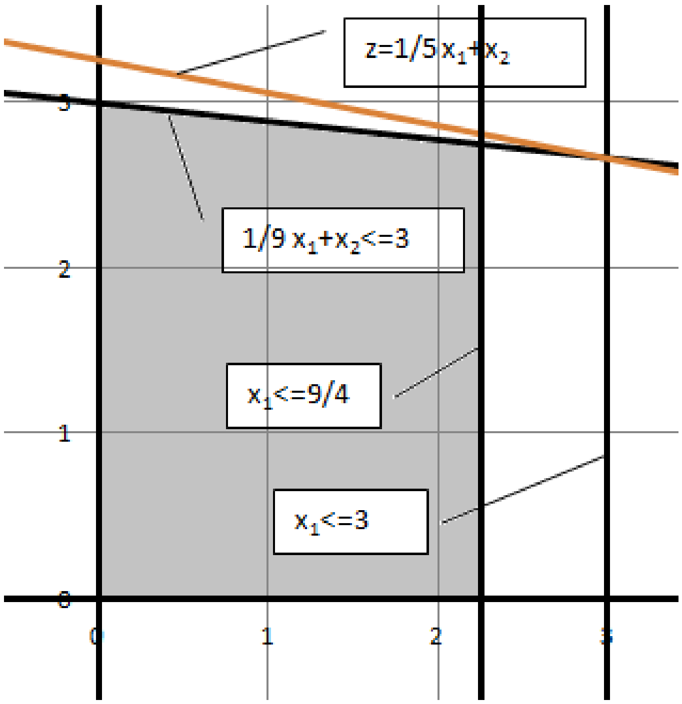


A folytonos lp optimális megoldásában x_2 értéke törtszám. A vágási feltétel bevezetéséhez az optimális nem egész megoldást tartalmazó táblázatban x_2 változó sorában meghatározzuk az értékek tört részét, felírjuk a vágási feltételt.

$$\frac{8}{9}u_1 + 0 \cdot u_2 \geq \frac{2}{3}$$

A vágási feltételt grafikusan is szemléltetjük. u_1 helyébe $3 - x_1$-t helyettesítünk. A behelyettesítést követen kapunk egy, az ábrán is megjeleníthet feltételt:

$$x_1 \leq \frac{9}{4}.$$



Megfigyelhetjük, hogy a vágási feltétel az eddigi optimális, de nem egészérték megoldást lemetszi a megengdett megoldások halmazáról. Ugyanakkor egyetlen lehetséges egészérték megengedett megoldást sem zárt ki.
A vágási feltétellel kiegészítjük a szimplex táblázatunkat is. A szimplex táblázatba nagyobb-egyenl feltétel nem írható be, mínusz eggyel való szorzásra van szükségünk. ξ_2 használunk, utalva arra, hogy x_2 sorából készült a vágási feltétel.

$$\begin{bmatrix} 3 & u_1 & u_2 & b \\ x_1 & 1 & 0 & 3 \\ x_2 & -\frac{1}{9} & 1 & \frac{8}{3} \\ \xi_2 & -\frac{8}{9} & 0 & -\frac{2}{3} \\ z & -\frac{4}{45} & -1 & -\frac{49}{15} \end{bmatrix}$$

A további transzformációt a duál-szimplex módszer szerint végezzük, negatív generáló elemet kell választanunk. Elvégezzük a ξ_2 - u_1 velemi bázistranszformációt.

$$\begin{bmatrix} 4 & \xi_2 & u_2 & b \\ x_1 & \frac{9}{8} & 0 & \frac{9}{4} \\ x_2 & -\frac{1}{9} & 1 & \frac{11}{4} \\ u_1 & -\frac{9}{8} & 0 & \frac{3}{4} \\ z & -\frac{1}{10} & -1 & -\frac{16}{5} \end{bmatrix}$$

Az els vágási feltétel még nem eredményezett egészérték megoldást. További feltétel, esetleg feltételek beillesztésére van szükség. A következ vágási feltételt x_1 sora szerint készítjük., majd beillesztjük a szimplex táblázatba.

$$\frac{1}{8}\xi_2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & \xi_2 & u_2 & b \\ x_1 & \frac{9}{8} & 0 & \frac{9}{4} \\ x_2 & -\frac{1}{9} & 1 & \frac{11}{4} \\ u_1 & -\frac{9}{8} & 1 & \frac{3}{4} \\ \xi_{1,} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \\ z & -\frac{1}{10} & -1 & -\frac{16}{5} \end{bmatrix}$$

Ismételten a duál-szimplex módszer szerint végezzük a transzormációt., negatív generáló elemet kell választanunk. Elvégezzük a $\xi_1 - \xi_2$ velemi bázistranszformációt.

$$\begin{bmatrix} 6 & \xi_2 & u_2 & b \\ x_1 & 9 & 0 & 0 \\ x_2 & -1 & 1 & 3 \\ u_1 & -9 & 0 & 3 \\ \xi_{2,} & -8 & 0 & -2 \\ z & -\frac{4}{5} & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

A feladat 6. táblázatában a megoldás optimális egész megoldás. $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $z = 3$. A feladatot ezzel megoldottuk.

A Gomory vágás módszert egy nagyobb méret, ábrázolásra már nem alkalmas feladaton keresztül is bemutatjuk.

Feltételrendszer:

$$\begin{aligned} &x_1 + 2\cdot x_2 \le 20, \\ &2\cdot x_2 - x_3 + 3\cdot x_4 \le 20, \\ &x_1 + 4\cdot x_3 + x_4 \le 8, \\ &x_1, x_2, \ x_3 \ge 0, \quad x_1, x_2, x_3 \ \ \textit{egész} \end{aligned}$$

Maximalizálandó célfüggvény:

$$z = 3\cdot x_1 + x_2 + x_3 + 8\cdot x_4 \rightarrow \max$$

Egészérték megoldás mellett maximalizáljuk a célfüggvényt!

Els lépésként megoldjuk az egészérték feladathoz tartozó folytonos lineáris pogramozási feadatot.

Az induló táblázat a szimplex módszerhez

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 20 \\ u_2 & 0 & 2 & -1 & 3 & 20 \\ u_3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 8 \\ z & 3 & 1 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Az induló táblázat nem tartalmaz optimális megoldást, generáló elemet választunk. Az x_1-u_3 elemi bázistranszformációt elvégezve kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & u_3 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 12 \\ u_2 & 0 & 2 & -1 & 3 & 20 \\ x_1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 8 \\ z & -3 & 1 & -11 & 5 & -24 \end{bmatrix}$$

Az els táblázat nem tartalmaz optimális megoldást. további báziscserére van szükség. A lehetséges generáló elemet kiválasztjuk. A x_4-u_2 bázistranszformációt végrehajtva kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 2 & u_3 & x_2 & x_3 & u_2 & b \\ u_1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{16}{3} \\ x_4 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{20}{3} \\ x_1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ z & -3 & -\frac{7}{3} & -\frac{28}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{172}{3} \end{bmatrix}$$

A második táblázat a folytonos lp optimális megoldását tartalmazza. Az egészértékség feltételének nem felel meg.
A Gomory vágás új feltételét csatoljuk a feladathoz.

x_1 változó nem egészérték, a vágási feltételt x_1 sorából készítjük., majd csatoljuk a szimplex táblázathoz.

$$0\,u_3 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}u_2 \geq \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & u_3 & x_2 & x_3 & u_2 & b \\ u_1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{16}{3} \\ x_4 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{20}{3} \\ x_1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \xi_1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ z & -3 & -\frac{7}{3} & -\frac{28}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{172}{3} \end{bmatrix}$$

a generáló elemet kiválaszjuk a duálszimplex módszernek megfelelően. ξ_1-u_2 bázistranszformációt végrehajtva kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 4 & u_3 & x_2 & x_3 & \xi_1 & b \\ u_1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ x_4 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{13}{2} \\ x_1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ u_2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ z & -3 & -\frac{3}{2} & -\frac{17}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{113}{2} \end{bmatrix}$$

Az els vágási feltétel után még nem kaptunk egészérték megoldásokat.
x_4 változó nem egészérték. A vágási feltételt a sorából készítjük, majd csatoljuk a szimplex táblázathoz.

$$0\, u_3 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}\xi_1 \geq \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
5 & u_3 & x_2 & x_3 & \xi_1 & b \\
\hline
u_1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\
x_4 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{13}{2} \\
x_1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\
u_2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\
\xi_4 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
z & -3 & -\frac{3}{2} & -\frac{17}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{113}{2}
\end{array}$$

a generáló elemet kiválaszjuk a duálszimplex módszernek megfelelően. ξ_4-x_2 bázistranszformációt végrehajtva kapjuk:

$$\begin{array}{c|ccccc}
6 & u_3 & \xi_4 & x_3 & \xi_1 & b \\
\hline
u_1 & -1 & -1 & -3 & 0 & 6 \\
x_4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 6 \\
x_1 & 1 & -1 & 5 & 0 & 2 \\
u_2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
x_2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\
z & -3 & -3 & -7 & -1 & -55
\end{array}$$

Az utolsó táblázatunkban a megoldás optimális és egészérték, két vágási feltétel beillesztése után.

Interaktív feladatok a Gomory vágás gyakorlásához:

Oldjuk meg a következ feladatokat

$x_i \geq 0, x_i$ *egész*, $i = 1, ..., n$ feltételezése mellett!

Feltételrendszer:	Válasszon a felkínált feladatok közül! 1. feladat

$x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_5 \le 100,$
$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 80,$
$x_1 + x_3 + x_4 \le 50$

Maximalizálandó célfüggvény: $z \rightarrow \max$

$2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 + 2\,x_5$

Szimplextáblázat:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ u_1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 100 \\ u_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 80 \\ u_3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 50 \\ -z & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Eredmények:

$[x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]$

célfüggvény: $(z = 0)$

a megoldás nem optimális

a megoldás egészértékû

Báziscsere:

u[1] ⇔ x[1] generáló elem: 1

["a kijelölt elem nem szûk keresztmetszet"]

Végrehajtás | u[1] | Vágó feltétel hozzáadása

(1)

>

>

Megoldásra ajánlott további feladatok a Gomory vágás gyakorlásához:

Oldjuk meg a következ feladatokat

$x_i \geq 0$, x_i *egész*, $i = 1, ..., n$ feltételezése mellett!

1. feladat:

Feltételrendszer:

$$\begin{aligned} &x_1 + 2\ x_2 + x_4 \leq 9, \\ &x_2 + 2\ x_3 \geq 11, \\ &2\ x_1 + 4\ x_2 + 2\ x_3 = 16 \end{aligned}$$

Maximalizálandó célfüggvény:

$$z = 10\ x_1 + 8\ x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

2. feladat:

Feltételrendszer:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_4 \leq 6, \\ &2\ x_1 - x_3 + 3\ x_4 = 12, \\ &2\ x_1 + 4\ x_3 \leq 8 \end{aligned}$$

Maximalizálandó célfüggvény:

$$z = 3\ x_1 + x_2 + x_3 + 2\ \cdot x_4 \rightarrow \max$$

Egészérték programozási feladatok megoldása korlátozás és szétválasztás módszerével

Az elz fejezetben folytonos lineáris programozási feladat optimális egészérték megoldását kerestük a Gomory vágás módszerével. A Gomory vágás módszerén túl további eljárásokat is ismerünk az egészérték feladatok optimális megoldásának meghatározására, most a "Korlátozás és szétválasztás" módszerével ismerkedünk meg.

Oldjuk meg a következ feladatot

$x_i \geq 0$, x_i *egész*, $i = 1, ..., n$ feltételezése mellett!

$x_1 + x_2 \leq 7,$
$9 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 45$

Maximalizálandó célfüggvény:

$z = 7\ \ x_1 + 5\ \ x_2 \rightarrow \max$

Korábbi fejezetekben megismerkedtünk az operációkutatás elméletében módszertanában alaposan kidolgozott eljárásokkal, mint a szimplex módszerrel, a duál szimplex módszerrel, stb.

A Maple programban kitnen megvalósításra kerültek ezek az eljárások. A beépített Maple parancsok használatára támaszkodunk a következkben. Célunk az egészérték programozási feladat megoldása a szétválasztás és korlátozás módszerével, ami a részletszámításokat illeti a Maplere bízzuk magunkat.

A Maple a szimplex módszert a *simplex* csomagban teszi elérhetvé a felhasználó számára. A *simplex* csomagban helyet kapott néhány olyan eljárás, melyek segítségével önállóan is megoldhatunk lineáris programozási feladatokat.

A "*with(simplex):*" utasítással a *simplex* csomagra történ utalást állítjuk be.
A lineáris programozási feladatot a *simplex* csomag *maximize* utasításával oldjuk meg. A *maximize* utasítás számára a lineáris programozási feladatot a célfüggvény és a korlátozó feltételek együttese határozza meg.
A feladat megadásakor szabadon megválaszthatjuk a képleteinkben szerepl változók neveit, természetesen mi az eddig megszokott jelöléseket használjuk. Az ismeretleneinket x_1 és x_2 jelöli. A célfüggvény a maximize utasítás els paramétere, ettl vesszvel elválasztva, kapcsos zárójellel bezárva {a korlátozó feltételeket} soroljuk fel. A korlátozó feltételeket egymástól vesszvel választjuk el. A kapcsos zárójelben történ felsorolást a Maple a korlátozó feltételek halmazaként kezeli.
A *maximize* utasítás pontosvesszvel zárjuk. Az Enter billenty leütését követen a lineáris programozási feladat optimális megoldását is megkapjuk.

```
> with(simplex) :
> maximize(7 x1 + 5 x2, {x1 ≥ 0, x2 ≥ 0, x1 + x2 ≤ 7, 9 x1 + 5·x2 ≤ 45});
```

$$\left\{x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{9}{2}\right\} \tag{2}$$

Ha a maximize utasítást a NONNEGATIVE paraméterrel kiegészítjük, akkor a $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ feltételek megadása feleslegessé válik, a Maple utasításaink áttekinthetbbek lesznek. Az optimális megoldásra természetesen így is ugyanazokat az értékeket kapjuk.

> $maximize\left(7\,x_1 + 5\,x_2, \{x_1 + x_2 \leq 7, 9\,x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 45\}, NONNEGATIVE\right);$

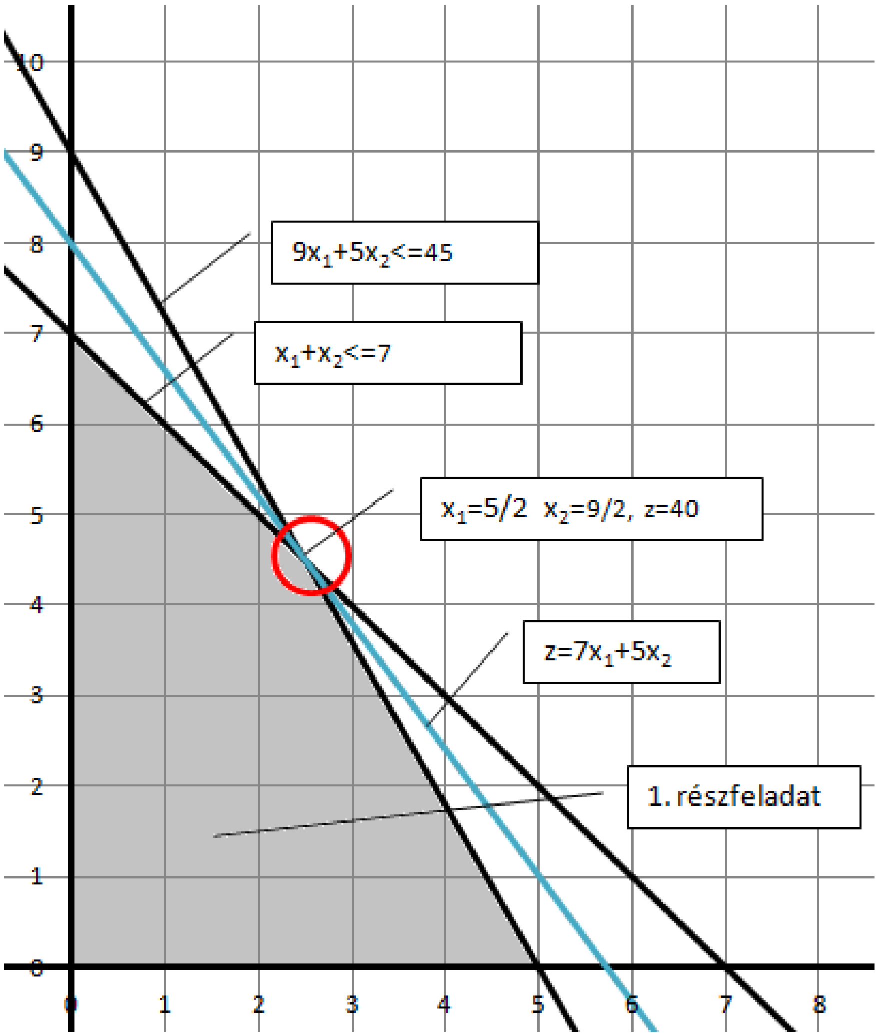
$$\left\{x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{9}{2}\right\} \tag{3}$$

A lineáris programozási feladat optimális megoldását kaptuk meg. A célfüggvény értékét az optimális megoldás behelyettesítésével számíthatjuk ki.
A következ Maple utasítással éppen ezt hajtjuk végre. x_1 és x_2 változók értékeit az *eval* Maple utasítással tudjuk behelyettesíteni a célfüggvény képletébe. Kihasználjuk azt, hogy a százalék szimbólum *(%)* a Maple jelölésrendszerében az utoljára kiszámított értéket jelöli. Így a tévedés lehetségét is kizárjuk a behelyettesítés során.

> $\mathrm{z} = \mathrm{eval}\left(7\,x_1 + 5\,x_2, \%\right);$

$$z = 40 \tag{4}$$

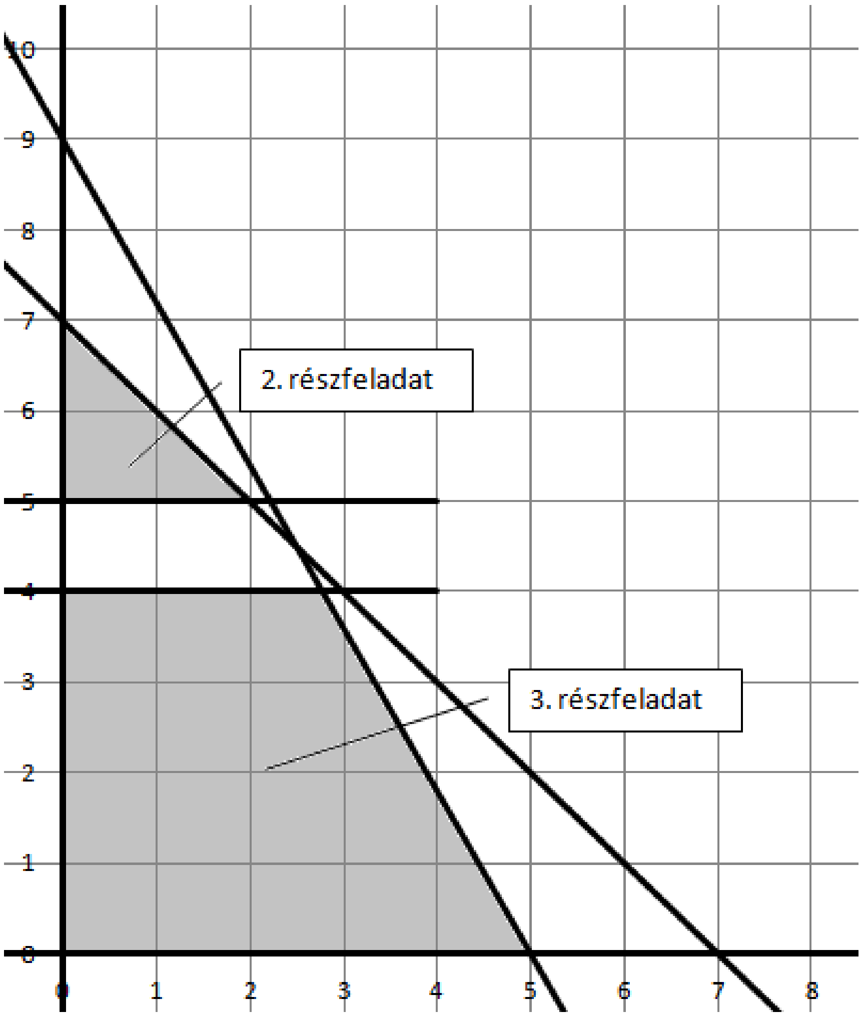
Akövetkez ábrán szemléltetjük a korlátozó feltételeket, a megengedett megoldások halmazát, az optimális megoldást és az azon keresztül haladó célfüggvény egyenesét.



Az egészérték feladatunk megoldásához vezet lépések közül az elsvel vagyunk kész, az els részfeladat a lineáris programozási feladat optimális törtérték megoldásának meghatározása volt. Az optimum értéke z=40, az egészérték feladat optimuma legfeljebb ennyi lehet, ezt nem haladhatja meg.

A megengedett egészérték megoldások közül az optimálisat a szétválasztás és korlátozás módszerével határozzuk meg. Szeretnénk elkerülni, hogy az összes lehetséges egészérték megoldást egyenként elállítsuk, az optimalitását megvizsgáljuk.

A megengedett megoldások halmazát úgy bonjuk két részre, hogy egészérték megengedett megoldást ne veszítsünk el. Tekintsük második részfeladatnak, ha az eredeti korlátozó feltételeinket $x_2 \geq 5$ egyenltlenséggel egészítjük ki. A harmadik részfeladatot állítsuk el úgy, hogy az eredeti feltételeket $x_2 \leq 4$ egyenltlenséggel egészítjük ki. A feladat részekre bontását a következ ábrán szemléltetjük:



A szétválasztás és korlátozás módszer alkalmazása során a részfeladatok közül annak a feldolgozásával folytatjuk a munkát, amelyet később hoztunk létre. Legyen tehát a 3. részfeladat feldolgása a következ lépés. Hívjuk segítségül a Maple *simplex* csomagjának *maximize* utasítását. Egészítsük ki a feltételrendszert a $x_2 \leq 4$ feltétellel.

> $maximize\left(7\,x_1 + 5\,x_2,\ \{x_1 + x_2 \leq 7,\ 9\,x_1 + 5\cdot x_2 \leq 45,\ x_2 \leq 4\},\ NONNEGATIVE\right);$

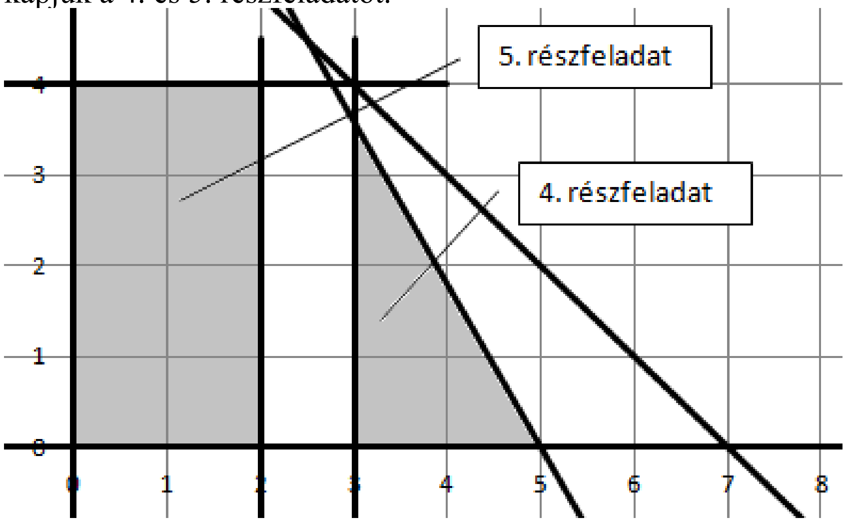
$$\left\{x_1 = \frac{25}{9},\ x_2 = 4\right\} \tag{5}$$

> $z = \mathrm{eval}\left(7\,x_1 + 5\,x_2,\ \%\right);$

$$z = \frac{355}{9} \tag{6}$$

>

A 3. részfeladat, mint lineáris programozási feladat optimális megoldása nem egészérték. A korábban alkalmazott eljárás szerint két részre bontjuk a 3. részfeladatot. sa optimális Az elz fejezetben folytonos lineáris programozási feladat optimális egészérték megoldását kerestük a szétválasztás és korlátozás módszerével. Mivel az x_1 változó értéke tört, ezért bevezetjük a $x_1 \le 2$ és $x_1 \ge 3$ feltételeket, kapjuk a 4. és 5. részfeladatot.



Feldolgozzuk az 5. részfeladatot. Maximalizáljuk az 5. részfeladatra felírt lineáris programozái feladatot. A 3. részfeladat feltételrendszerét tovább bvítjük az $x_1 \le 2$ feltétellel.

> $maximize\left(7\,x_1 + 5\,x_2,\ \{x_1 + x_2 \le 7,\ 9\,x_1 + 5\cdot x_2 \le 45,\ x_2 \le 4,\ x_1 \le 2\},\ NONNEGATIVE\right);$

$$\{x_1 = 2,\ x_2 = 4\} \qquad (7)$$

> $\mathrm{z} = \mathrm{eval}\left(7\,x_1 + 5\,x_2,\ \%\right);$

$$z = 34 \qquad (8)$$

Az 5. részfeladat egészérték optimális megoldást eredményezett. A kiszámított értékek $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, az 5. részfeladatra vonatkozó maximum értéke $z = 34$. A feladat megoldásának hátralév részében úgy használjuk fel az 5. részfeladat optumimát, hogy amennyiben egy másik részfeladat maximuma legyen az akár tört, vagy egész kisebb, mint az 5. részfeladaté, akkor azt az egész részfeladatot feldolgozottnak tekinthatjük.

A 4. részfeladat feldolgozása következik. Maximalizálandó a 4. részfeladatra felírt lineáris programozái feladat. A 3. részfeladat feltételrendszerét bvítjük tovább az $x_1 \ge 3$ feltétellel.

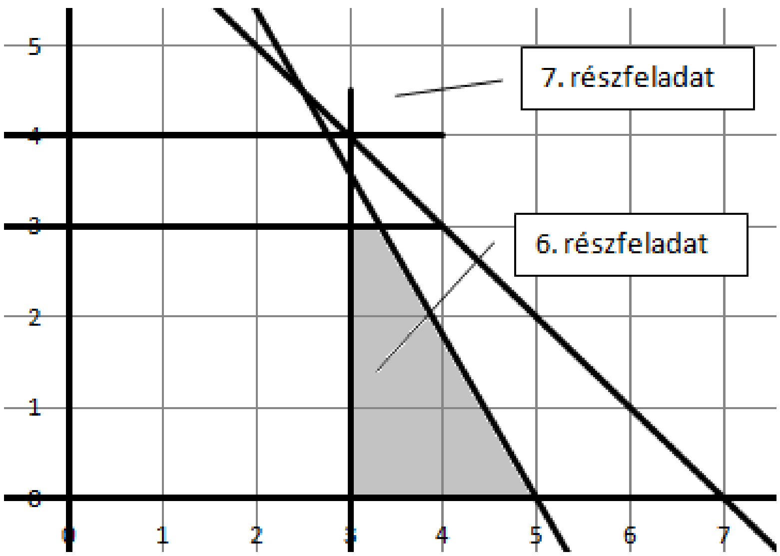
> $maximize\left(7\,x_1 + 5\,x_2,\ \{x_1 + x_2 \le 7,\ 9\,x_1 + 5\cdot x_2 \le 45,\ x_2 \le 4,\ x_1 \ge 3\},\ NONNEGATIVE\right);$

$$\left\{x_1 = 3,\ x_2 = \frac{18}{5}\right\} \qquad (9)$$

> $\mathrm{z} = eval\left(7\,x_1 + 5\,x_2,\ \%\right);$

$$z = 39 \qquad (10)$$

A 4. részfeladathoz tartozó lineáris programozási feladat optimális megoldása törtérték. Az optimuma $z = 3 \cdot 7 + \frac{5 \cdot 18}{5} = 39$. Ez az optimum magasabb, mint az 5. részfeladatra kapott $z = 34$. Ezért a 4. részfeladatot x_2 szerint további részfeladatokra bontjuk. A 6. részfeladatot az $x_2 \le 3$, a 7. részfeladatot a $x_2 \ge 4$ feltételek bevezetése után kapjuk. A 7. részfeladatot szemügyre véve láthatjuk, hogy a megengedett tartománya üres halmaz, a feladat további szétválasztása ezen az ágon befejezdött. A 6. részfeladattal fogunk foglalkozni.



A 6. részfeladat feldolgozását a 4. részfeladat feltételrendszerének bvítésével kezdjük. Csatoljuk az $x_2 \le 3$ feltételt.

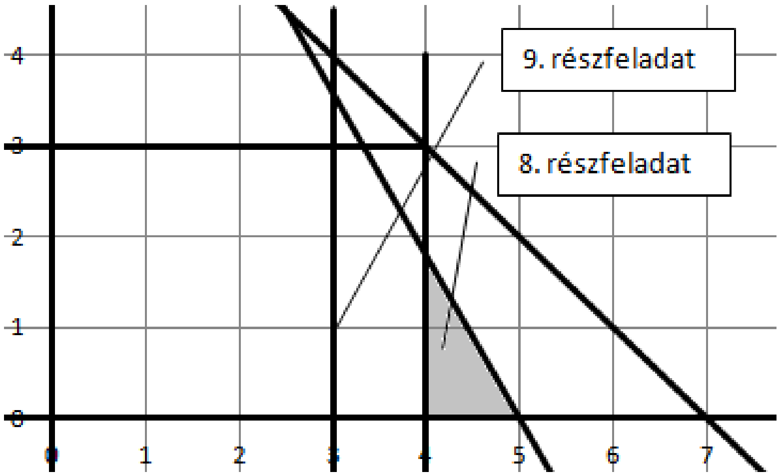
> $maximize\left(7\,x_1 + 5\,x_2, \{x_1 + x_2 \le 7, 9\,x_1 + 5 \cdot x_2 \le 45, x_2 \le 4, x_1 \ge 3, x_2 \le 3\}, NONNEGATIVE\right);$

$$\left\{x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = 3\right\} \tag{11}$$

> $z = \mathrm{eval}\left(7\,x_1 + 5\,x_2, \%\right);$

$$z = \frac{115}{3} \tag{12}$$

A 6. részfeladat optimális megoldása nem egészérték. Az optimuma $z = \frac{115}{3}$, ami nagyobb, mint az 5. részfeladaté $z = 34 = \frac{102}{3}$. Ezért x_1 változó értéke szerint alkalmazzuk a szétválasztást. Bevezetjük a $x_1 \le 3$ és $x_1 \ge 4$ feltételeket, hogy elállítsuk a 8. és 9. részfeladatot.



A 9. részfeladat egyetlen függleges szakaszra szkült. Az optimális megoldása az ábráról is leolvasható, A Maple maximize utasítását is használhatjuk, ha a 6. részfeladathoz tartozó feltételrendszert kiegészítjük a $x_1 \leq 3$ feltétellel.

> $maximize\left(7\,x_1 + 5\,x_2, \{x_1 + x_2 \leq 7, 9\,x_1 + 5\cdot x_2 \leq 45, x_2 \leq 4, x_1 \geq 3, x_2 \leq 3, x_1 \leq 3\}, NONNEGATIVE\right);$

$$\{x_1 = 3, x_2 = 3\} \qquad \textbf{(13)}$$

> $z = \mathrm{eval}(7\,x_1 + 5\,x_2, \%);$

$$z = 36 \qquad \textbf{(14)}$$

A 9. részfeladatra kapott optimális megoldás egészérték, ráadásul a célfüggvény optimuma magasabb, mint az 5. részfeladaté. Az eddig fel nem dolgozott részfeladatokat csak akkor választjuk szét további részekre, ha a 9. részfeladat megoldásánál magasabb optimumú megoldásra van kilátás.

Dolgozzuk fel a 8. részfeladatot. A 6. részfeladathoz tartozó feltételrendszert kiegészítjük a $x_1 \geq 4$ feltétellel.

> $maximize\left(7\,x_1 + 5\,x_2, \{x_1 + x_2 \leq 7, 9\,x_1 + 5\cdot x_2 \leq 45, x_2 \leq 4, x_1 \geq 3, x_2 \leq 3, x_1 \geq 4\}, NONNEGATIVE\right);$

$$\left\{x_1 = 4, x_2 = \frac{9}{5}\right\} \qquad \textbf{(15)}$$

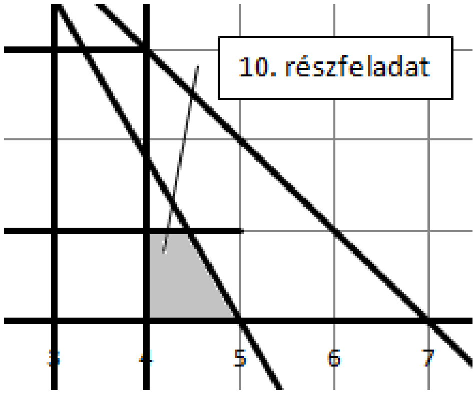
> $z = \mathrm{eval}(7\,x_1 + 5\,x_2, \%);$

$$z = 37 \qquad \textbf{(16)}$$

A 8. részfeladat megoldása nem egészérték, optimuma magasabb, mint a 9. részfeladaté, alkalmazzuk a szétválasztást x_2 változó szerint. Kapjuk a 10. és 11. részfeladatot. A bevezetend feltételek $x_2 \leq 1$ (10. részfeladat) és $x_2 \geq 2$ (11.részfeladat). Látható, hogy $x_2 \geq 2$ feltétel üres halmazt eredményez, az eddig megtalált optimum javítására nincs lehetségünk.

A 10. részfeladat feldolgozása következik. A 8. részfeladathoz tartozó feltételrendszert kiegészítjük a

$x_2 \leq 1$ feltétellel.



> $maximize\left(7\,x_1 + 5\,x_2, \{x_1 + x_2 \leq 7, 9\,x_1 + 5\cdot x_2 \leq 45, x_2 \leq 4, x_1 \geq 3, x_2 \leq 3, x_1 \geq 4, x_2 \leq 1\},\right.$
$\left. NONNEGATIVE\right);$

$$\left\{x_1 = \frac{40}{9}, x_2 = 1\right\} \quad (17)$$

> $z = \mathrm{eval}(7\,x_1 + 5\,x_2, \%);$

$$z = \frac{325}{9} \quad (18)$$

A 10. részfeladat optimuma magasabb, mint az eddigi egészérték optimum. Ugyanis $36 = \frac{324}{9} < \frac{325}{9}$. Ezért szétválasztjuk a 10. részfeladatot. Bevezetjük a $x_1 \leq 4$ (12. részfeladat) és $x_1 \geq 5$ (13. részfeladat) feltételeket. A 10. feladatra vonatkozó *maximize* utasítást bvítjük mindkét esetben.

A 12. részfeladat, amelynek egy szakasz a megengedett megoldás-halmaza:

> $maximize\left(7\,x_1 + 5\,x_2\right.$
$, \{x_1 + x_2 \leq 7, 9\,x_1 + 5\cdot x_2 \leq 45, x_2 \leq 4, x_1 \geq 3, x_2 \leq 3, x_1 \geq 4, x_2 \leq 1, x_1 \leq 4\},$
$\left. NONNEGATIVE\right);$

$$\{x_1 = 4, x_2 = 1\} \quad (19)$$

> $z = \mathrm{eval}(7\,x_1 + 5\,x_2, \%);$

$$z = 33 \quad (20)$$

A 13. részfeladat, amelynek csupán egyetlen-egy pont a megengedett megoldás-halmaza:

> $maximize\left(7\,x_1 + 5\,x_2\right.$
$, \{x_1 + x_2 \leq 7, 9\,x_1 + 5\cdot x_2 \leq 45, x_2 \leq 4, x_1 \geq 3, x_2 \leq 3, x_1 \geq 4, x_2 \leq 1, x_1 \geq 5\},$
$\left. NONNEGATIVE\right);$

$$\{x_1 = 5, x_2 = 0\} \quad (21)$$

> z = eval(7 x_1 + 5 x_2, %);

$$z = 35 \tag{22}$$

A 12. és 13. részfeladat megoldásait kiértékelve azt mondhatjuk, hogy nem találtunk az eddig feltárt optimumhoz képest, melyet a 9. részfeladat szolgáltatott kedvezbb megoldást.

Nem foglalkoztunk eddig a 2. részfeladattal. Az eredeti feladat feltételrendszerét egészítsük ki a $x_2 \geq 5$ feltétellel.

> $maximize\left(7\,x_1 + 5\,x_2, \{x_1 + x_2 \leq 7, 9\,x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 45, x_2 \geq 5\}, NONNEGATIVE\right)$;

$$\{x_1 = 2, x_2 = 5\} \tag{23}$$

> z = eval(7 x_1 + 5 x_2, %);

$$z = 39 \tag{24}$$

2. részfeladatra megoldott lineáris programozási feladat egészérték megoldást szolgáltatott, a hozzá tartozó optimum magasabb, mint az eddigi egészérték optimum. $36 < 39$.

Mivel a szétválasztás módszerével elállított részfeladatok mindegyikét feldolgoztuk, a 2. részfeladat fenti egészérték megoldása egyben az eredeti egészérték feladat megoldása is.

Megoldásra javasolt további feladatok

A korlátozás és szétválasztás módszerével oldja meg a következ egészérték feladatokat:

$x_1, x_2 \geq 0$
$4\,x_1 + 5\,x_2 + x_3 \leq 7$
$2\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 \leq 15$
$z = 4\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3$ *maximalizálandó*

$x_1, x_2 \geq 0$
$7\,x_1 + 2\,x_2 \leq 11$
$4\,x_1 + x_2 \leq 6$
$z = 3\,x_1 + x_2$ *maximalizálandó*

Vegyes egészérték programozási feladatok megoldása

Az egészértékségre vonatkozó elvárást vonatkoztathatjuk a feladatban szerepl változók mindegyikére, vagy csak egy részhalmazukra is. Ha nem minden változóra vonatkozik az egészértékség követelménye, akkor vegyes egészérték feladatról beszélünk. A korlátozás és szétválasztás módszerét a vegyes egészérték feladat megoldására is alkalmazhatjuk.

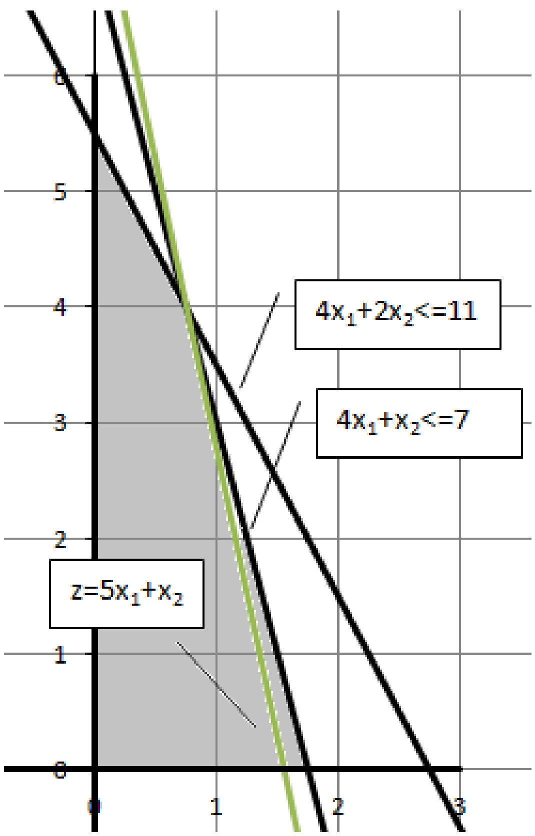
Legyen a vegyes egészérték feladatunk:

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 11,$$
$$4 \cdot x_1 + x_2 \leq 7,$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0, \quad x_1,\ x_2 \ \textit{egész}$$

Maximalizálandó célfüggvény:

$$z = 5 \cdot x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

A következ ábrán szemléltetjük a megengedett megoldások halmazát.



Határozzuk meg a lineáris programozási feladat (1. részfeladat) optimális megoldását és a hozzátartozó célfüggvény-értéket a Maple utasításainak segítségével!

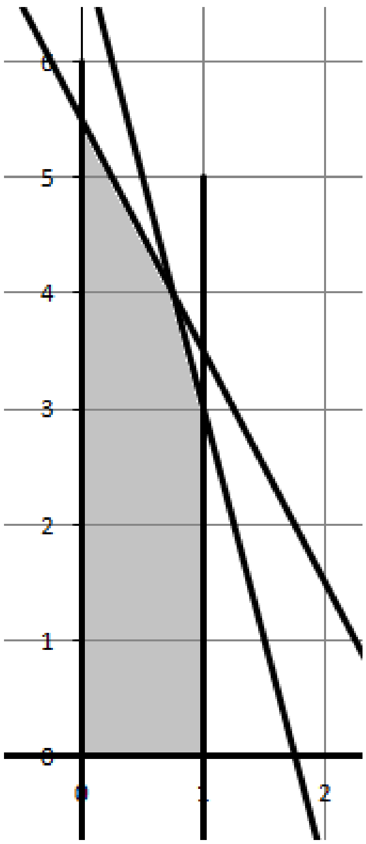
> $maximize\left(5\,x_1 + x_2, \left\{4\,x_1 + x_2 \leq 7, 4\,x_1 + 2\cdot x_2 \leq 11\right\}, NONNEGATIVE\right);$

$$\left\{x_1 = \frac{7}{4}, x_2 = 0\right\} \qquad (25)$$

> $\mathrm{z} = \mathrm{eval}\left(5\,x_1 + x_2, \%\right);$

$$z = \frac{35}{4} \qquad (26)$$

A lineáris programozási feladat optimális megoldása nem felel meg a vegyes egészérték követelménynek. Az x_1 értéke nem egész. Új feltételek bevezetésével két részfeladatot állítunk el. $x_1 \leq 1$ (2. részfeladat) és $x_1 \geq 2$ (3. részfeladat). A 3. részfeladat megengedett megoldáshalmaza üres, az ábra alapján ezt könnyen beláthatjuk. A 2. részfeladatot a következ ábrán találhatjuk.



A 2. részfeladat hoz tartozó lineáris programozási feladat optimális megoldását a Maple maximize parancsával állítjuk el. Az 1. részfeladat feltétel rendszeréhez csatoljuk a $x_1 \leq 1$ feltételt.

> $maximize\left(5\,x_1 + x_2, \left\{4\,x_1 + x_2 \leq 7, 4\,x_1 + 2\cdot x_2 \leq 11, x_1 \leq 1\right\}, NONNEGATIVE\right);$

$$\left\{x_1 = 1, x_2 = 3\right\} \qquad (27)$$

> z = eval(5 x1 + x2, %);

$$z = 8 \tag{28}$$

A 2. részfeladat optinális megoldása egyben a vegyes egészérték feladat megoldása is. mivel x1 értéke egész. Minden részfeladat megoldásait átvizsgáltuk.

Megoldásra javasolt további feladatok

A korlátozás és szétválasztás módszerével oldja meg a következ vegyes egészérték feladatokat:

$x_1, x_2 \geq 0$
$4\,x_1 + 5\,x_2 + x_3 \leq 7$
$2\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 \leq 15$
$z = 4\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3$ *maximalizálandó*
x_2, x_3 *legyen egész*

$x_1, x_2 \geq 0$
$7\,x_1 + 2\,x_2 \leq 11$
$4\,x_1 + x_2 \leq 6$
$z = 3\,x_1 + x_2$ *maximalizálandó*
x_2 *legyen egész*

A hátizsák probléma

Ha valakinek magával kell cipelni egy kiránduláson a szükséges felszerelést, akkor megfontolja, hogy mi az ami fontos, mit hagyjon inkább otthon. Egyenként mérlegeli, hogy melyik tárgy mennyire szükséges a kirándulás sikeréhez. Kiderül, hogy a tárgyak között fontossági sorrendet lehet megállapítani. A gyalogos katona felszerelésének tekintélyes súlya is hasonló meggondolásokra vezet. A következképpen fogalmazzuk meg a hátizsák problémát:

A hátizsákba pakolható tárgyak összes súlya nem haladhatja meg a maximálisan cipelhet mértéket. A hátizsákban elvinni szándékozott tárgyak súlya ismert, úgyszintén számértékekkel jelezzük a tárgyaink hasznosságát. Maximalizáljuk a hátizsák tartalmának összes hasznosságát, de az összsúly ne haladja meg az engedélyezett mértéket!

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_x \leq b$
$x_i = 0,\ vagy\ 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

feltétel mellett maximalizálandó

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

Tegyük fel, hogy a kirándulásra a következ tárgyaink állnak rendelkezésre. Úgy válogassuk össze a hátizsákba kerül dolgokat, hogy 10 kg-nál többet ne kelljen cipelnünk. Törekedjünk arra, hogy a hátizsákunk tartalmának összes hasznossága a lehet legnagyobb legyen.

Tárgy	***Súly (kg)***	***Hasznosság***
x_1 : *Ivóvíz* (3 *l*)	3	4
x_2 : *Pulóver, meleg ruhák*	1	2
x_3 : *Evőeszközök, pohár, stb*	1	1
x_4 : *Iránytű, térkép, távcső, egyéb*	4	6
x_5 : *Sátor*	5	8
x_6 : *Mentőláda*	2	5
x_7 : *Matrac, hálózsák*	4	7

A korlátozás és szétválasztás módszerrel oldjuk meg a hátizsák problémát.

A Maple nyelvén fogalmazzuk meg a feltételünket és a célfüggvényünket. A *feltetel* és *celfuggveny* változót írjuk fel a következképpen:

```
> SulyFeltetel := {3 x[1] + x[2] + x[3] + 4 x[4] + 5 x[5] + 2 x[6] + 4 x[7] <= 10}
```

$$SulyFeltetel := \{3\,x_1 + x_2 + x_3 + 4\,x_4 + 5\,x_5 + 2\,x_6 + 4\,x_7 \le 10\} \quad \textbf{(29)}$$

```
> CelFuggveny := 4 x[1] + 2 x[2] + x[3] + 6 x[4] + 8 x[5] + 5 x[6] + 7 x[7]
```

$$CelFuggveny := 4\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + 6\,x_4 + 8\,x_5 + 5\,x_6 + 7\,x_7 \quad \textbf{(30)}$$

```
>
```

A hátizsákba pakolt tárgyak együttes súlyára vonatkozó feltételünket ki kell egészíteni az egyes változókra $x_i \le 1$, $(i = 1 ... 7)$ vonatkozó egyenltlenségekkel, ha meg akarjuk oldani a feladathoz tartozó lineáris pogramozási feladatot. A súlyra vonatkozó feltétel és a hét változóra vonatkozó további feltétel együttes kezelését a Maple nyelvén úgy oldjuk meg, hogy a súlyfeltételt egy egyelem, a többi feltételt egy hételem halmazban helyezzük el, majd a két halmaz unióját képezzük. A halmaz elemeit a Maple nyelvén a kapcsos zárójelpáron belül soroljuk fel.
A lineáris programozási feladat megoldását (1. részfeladat) a *simplex* csomag *maximize* utasításával határozzuk meg.

```
> maximize(CelFuggveny
    , {x[1] <= 1, x[2] <= 1, x[3] <= 1, x[4] <= 1, x[5] <= 1, x[6] <= 1, x[7] <= 1} union SulyFeltetel,
    NONNEGATIVE);
```

$$\left\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \frac{3}{5}, x_6 = 1, x_7 = 1\right\} \tag{31}$$

> *célfüggvény* = *eval*(CelFuggveny, %);

$$\text{célfüggvény} = \frac{94}{5} \tag{32}$$

>

A megoldás nem egészérték. Új korlátozó feltételek bevezetésével két részre bontjuk a megengedett megoldások halmazát. $x_5 = 0$ és $x_5 = 1$ feltételekkel kapjuk a 2. és 3. részfeladatot. A megoldás menetét a 3. részfeladattal folytatjuk, majd a teljes felderítést követen fordítunk figyelmet a 2. részfeladatra.

A 3. részfeladatot megoldjuk a *maximize* utasítással.

> *maximize*(CelFuggveny, $\{x_1 \le 1, x_2 \le 1, x_3 \le 1, x_4 \le 1, x_5 = 1, x_6 \le 1, x_7 \le 1\}$ **union** *SulyFeltetel*, *NONNEGATIVE*);

$$\left\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1, x_7 = \frac{1}{2}\right\} \tag{33}$$

> *célfüggvény* = *eval*(CelFuggveny, %);

$$\text{célfüggvény} = \frac{37}{2} \tag{34}$$

>

A 3. részfeladat megoldása nem egészérték. x_7 változóra értéke szerint korlátozó feltételek bevezetésével két részre bontjuk a 3. részfeladatot. $x_7 = 0$ és $x_7 = 1$ feltételekkel kapjuk a 4. és 5. részfeladatot. Az 5. részfeladat feldolgozásával folytatjuk a megoldást. A 4. részfeladat még felderítettlen.

> *maximize*(CelFuggveny, $\{x_1 \le 1, x_2 \le 1, x_3 \le 1, x_4 \le 1, x_5 = 1, x_6 \le 1, x_7 = 1\}$ **union** *SulyFeltetel*, *NONNEGATIVE*);

$$\left\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = \frac{1}{2}, x_7 = 1\right\} \tag{35}$$

> *célfüggvény* = *eval*(CelFuggveny, %);

$$\text{célfüggvény} = \frac{35}{2} \tag{36}$$

>

Az 5. részfeladat megoldása nem egészérték. x_6 változóra értéke szerint korlátozó feltételek bevezetésével két részre bontjuk az 5. részfeladatot. $x_6 = 0$ és $x_6 = 1$ feltételekkel kapjuk a 6. és 7. részfeladatot. Az 7. részfeladat feldolgozásával folytatjuk a megoldást. A 6. részfeladat még felderítettlen.

> *maximize*(CelFuggveny, $\{x_1 \le 1, x_2 \le 1, x_3 \le 1, x_4 \le 1, x_5 = 1, x_6 = 1, x_7 = 1\}$ **union** *SulyFeltetel*, *NONNEGATIVE*)

;

$$\{\ \} \tag{37}$$

>

A 7. részfeladatnak nincs megoldása. A feltételekben szerepl egyenlségek ellentmondanak annak, hogy a súly ne haladja meg a 10 kg-ot.

A 6. részfeladat feldolgozásával folytatjuk a megoldást.

> $maximize(\mathrm{CelFuggveny}, \{x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, x_3 \leq 1, x_4 \leq 1, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 1\}$ **union** $SulyFeltetel, NONNEGATIVE)$;

$$\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 1\} \tag{38}$$

> $célfüggvény = eval(\mathrm{CelFuggveny}, \%)$;

$$célfüggvény = 17 \tag{39}$$

>

A hátizsák problémánk mgoldása során els alkalommal kaptunk egészérték megoldást. A célfüggvény értéke 17. További még felderítettlen részfeladatokat kerítünk sorra. A 4. részfeladat feldolgozásával folytatjuk a megoldást.

> $maximize(\mathrm{CelFuggveny}, \{x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, x_3 \leq 1, x_4 \leq 1, x_5 = 0, x_6 \leq 1, x_7 = 1\}$ **union** $SulyFeltetel, NONNEGATIVE)$;

$$\left\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = \frac{3}{4}, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1\right\} \tag{40}$$

> $célfüggvény = eval(\mathrm{CelFuggveny}, \%)$;

$$célfüggvény = \frac{37}{2} \tag{41}$$

>

Az 4. részfeladat megoldása nem egészérték. x_4 változóra értéke szerint korlátozó feltételek bevezetésével két részre bontjuk a 4. részfeladatot. $x_4 = 0$ és $x_4 = 1$ feltételekkel kapjuk a 8. és 9. részfeladatot. Az 9. részfeladat feldolgozásával folytatjuk a megoldást. A 8. részfeladat még felderítettlen.

> $maximize(\mathrm{CelFuggveny}, \{x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, x_3 \leq 1, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 \leq 1, x_7 = 1\}$ **union** $SulyFeltetel, NONNEGATIVE)$;

$$\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1\} \tag{42}$$

> $célfüggvény = eval(\mathrm{CelFuggveny}, \%)$;

$$célfüggvény = 18 \tag{43}$$

>

A hátizsák problémára az elz megoldásnál jobb megoldáshoz jutottunk. A célfüggvény értéke 18. A 8.

részfeladat feldolgozásával folytatjuk a megoldást.

> *maximize*(CelFuggveny, $\{x_1 \le 1, x_2 \le 1, x_3 \le 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 \le 1, x_7 = 1\}$ **union** *SulyFeltetel*, *NONNEGATIVE*);

$$\{x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1\} \quad \textbf{(44)}$$

> *célfüggvény* = *eval*(CelFuggveny, %);

$$célfüggvény = 18 \quad \textbf{(45)}$$

>

Ismét egészérték megoldásunk van, a célfüggvény értéke azonos a korábbi megoldáséval.
A hátizsák problémánknak a 2. részfeladatának vizsgálatával folytatjuk a megoldást.

A 2. részfeladatot megoldjuk a *maximize* utasítással.

> *maximize*(CelFuggveny, $\{x_1 \le 1, x_2 \le 1, x_3 \le 1, x_4 \le 1, x_5 = 0, x_6 \le 1, x_7 \le 1\}$ **union** *SulyFeltetel*, *NONNEGATIVE*);

$$\left\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = \frac{3}{4}, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1\right\} \quad \textbf{(46)}$$

> *célfüggvény* = *eval*(CelFuggveny, %);

$$célfüggvény = \frac{37}{2} \quad \textbf{(47)}$$

>

A 2. részfeladatra felírt lineáris programozási feladat megoldása magasabb célfüggvényértéket szolgáltat, mint az eddigi legjobb egészérték megoldások. Ezért indokolt a 2. részfeladat részekre bontása az x_4 változó alapján. $x_4 = 0$ és $x_4 = 1$ feltételekkel kapjuk a 10. és 11. részfeladatot. A 11. részfeladat feldolgozásával folytatjuk a megoldást. A 10. részfeladat még felderítetlen.

A 11. részfeladatot megoldjuk a *maximize* utasítással.

> *maximize*(CelFuggveny, $\{x_1 \le 1, x_2 \le 1, x_3 \le 1, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 \le 1, x_7 \le 1\}$ **union** *SulyFeltetel*, *NONNEGATIVE*);

$$\left\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = \frac{3}{4}\right\} \quad \textbf{(48)}$$

> *célfüggvény* = *eval*(CelFuggveny, %);

$$célfüggvény = \frac{73}{4} \quad \textbf{(49)}$$

>

A 11. részfeladatra megoldása magasabb célfüggvényértéket szolgáltat, mint az eddigi legjobb egészérték megoldások. Ezért a 11. részfeladatot az

x_7 változó alapján részekre bontjuk. $x_7 = 0$ és $x_7 = 1$ feltételekkel kapjuk a 12. és 13. részfeladatot. A 13. részfeladat feldolgozásával folytatjuk a megoldást. A 12. részfeladat még felderítettlen.

A 13. részfeladat azonos a már felderített 9. részfeladattal. Nem folytatjuk.

A 12. részfeladatot megoldjuk a *maximize* utasítással.

> $maximize\big(\text{CelFuggveny}, \{x_1 \le 1, x_2 \le 1, x_3 \le 1, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 \le 1, x_7 = 0\}$ **union** $SulyFeltetel, NONNEGATIVE\big);$

$$\{x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0\} \quad \textbf{(50)}$$

> $célfüggvény = eval(\text{CelFuggveny}, \%);$

$$célfüggvény = 17 \quad \textbf{(51)}$$

>

Az elért egészérték megoldáshoz tartozó célfüggvény érték kisebb az eddigi optimumnál.

A 10. részfeladatot megoldjuk a *maximize* utasítással. Magába foglalja a 8. részfeladatot.

> $maximize\big(\text{CelFuggveny}, \{x_1 \le 1, x_2 \le 1, x_3 \le 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 \le 1, x_7 \le 1\}$ **union** $SulyFeltetel, NONNEGATIVE\big);$

$$\{x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1\} \quad \textbf{(52)}$$

> $célfüggvény = eval(\text{CelFuggveny}, \%);$

$$célfüggvény = 18 \quad \textbf{(53)}$$

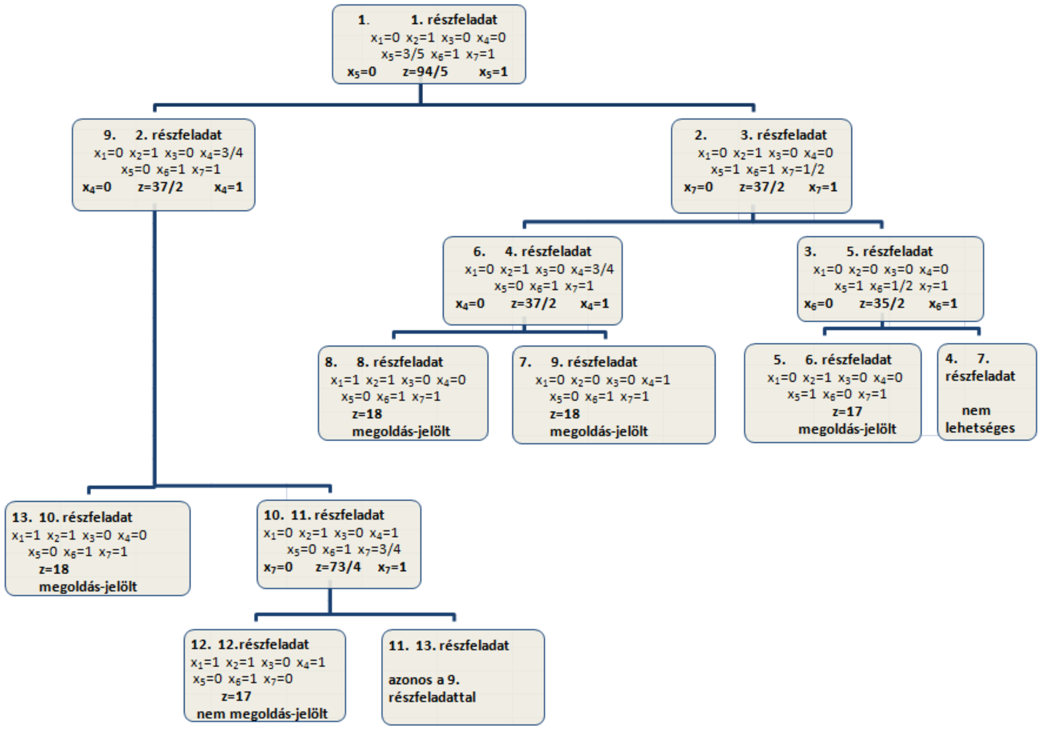
>

Az elért egészérték megoldáshoz tartozó célfüggvény érték megegyezik az eddigi optimummal.

Összefoglalóan azt mondhatjuk, hogy a hátizsák feladatunknak négy olyan megoldása van, melynek egyaránt 18 az összes hasznossága. A megoldások a következk:

$\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1\}, súly : 10\ kg$
$\{x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1\}, súly : 10\ kg$

A korlátozás és szétválasztás módszerrel megoldottuk a hátizsák problémát. A korlátozás és szétválasztás részlépéseit fa szerkezet ábrán szemléltethetjük.



A hátizsák feladat megoldása, a Maple segítségével

A Maple gazdagon felszerelt programrendszer. Sokoldalú csomagokkal rendelkezik. Természetesen megtaláljuk az egészérték programozási feladatok megoldására elkészített utasítást is. Az *Optimization* csomagban kell keresnünk az *LPSolve* utasítást. Az LPSolve utasítás nagyon hasonlóan használandó a *simple* csomag *maximize* utasításához, csupán a mködését módosító paraméterekben találunk eltéréseket. Ajánlatos dokumentáció részletes tanulmányozása a Maple utasítások hatékony használatához. Az LPSolve utasítást az egészérték feladatok maximalizálásához a következk szerint kell megtenni:

> $with(Optimization)$:

> $LPSolve\big(\text{CelFuggveny}, \{x_1 \le 1, x_2 \le 1, x_3 \le 1, x_4 \le 1, x_5 \le 1, x_6 \le 1, x_7 \le 1\}$ **union** $SulyFeltetel, assume = \{nonnegative, integer\}, maximize\big);$

$$[18, [x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 1]] \quad \textbf{(54)}$$

Amint láthatjuk az LPSolve utasítás talált optimális egészmegoldást a hátizsák problémánkra. Azt is megfigyeljük azonban, hogy az alternatív megoldásokat nem derítette fel.

Bináris egészérték programozási feladatok megoldása korlátozás és szétválasztás   módszerével

Az elz fejezetben folytonos lineáris programozási feladat optimális egészérték megoldását kerestük a korlátozás és szétválasztás módszerével.
Gyakori feladattípus az amelyben az ismeretlen mennyiségek csak két elfogadható értéket vesznek fel, tipikusan nulla, vagy egy lehet az értékük.
Egy mintapéldán keresztül mutatjuk be a feladattípust és a szétválasztás és korlátozás módszerét.

Négy fogadó állomáson kell négy szállítmányt kirakodni és feldolgozni. Mind a négy fogadó állomás alkalmas bármelyik szállítmány fogadására, de a kirakodás és feldolgozás költsége állomásonként és szállítmányonként eltér lehet. Olyan fogadási tervet kell készítenünk, amely a legkisebb költséggel oldja meg a kirakodás és feldolgozás feladatát.

A feladat költségmátrixa a következ

	Fogadó 1	Fogadó 2	Fogadó 3	Fogadó 4
Szállítmány A	7	3	4	4
Szállítmány E	5	6	3	5
Szállítmány C	3	3	1	2
Szállítmány D	2	2	3	7

A feladat megfogalmazása felveti azt a gondolatot, hogy az összes lehetséges megoldást sorba vesszük, majd a minimális költség megoldást felkínáljuk. Sajnos a bináris egészérték feladat lehetséges megoldásainak száma kett hatványai szerint növekszik. Ha nem bináris feladatról van szó, hanem többérték egy-egy változó, akkor sokkal több a lehetséges megoldások száma. Jelents számítástechnikai kapacitás köthet le az ilyen típusú feladatok megoldása.
A szétválasztás és korlátozás módszer algoritmusa els lépésben a megengedett megoldások halmazát néhány részhalmazra bontja. A részhalmazokat vagy sikerül kizárni a további vizsgálatokból, vagy további részhalmazokra bontjuk. Egész addig folytatjuk ezt az eljárást, amíg az optimális megengedett megoldáshoz el nem jutunk.
A szétválasztás és korlátozás módszere rekurzív algoritmus. Az adminisztrálása a legcélszerbben egy fa szerkezet ábráján végezhet.

A feladat megoldása

Költségminimalizálás a feladatunk, a minimális költség fogadási terv meghatározása. Az optimális megengedett megoldás költsége ebben a pillanatban ismeretlen, legyen Z=M (végtelen).
Az összes megoldások halmaza tartalmaz a megengedett megoldások mellett nem megengedett megoldásokat is. Példánkban a megengedett megoldásokból 4!=24 létezik. Egy szállítmány csak egy fogadó állomásra mehet.
Az összes megoldást tekintve   meghatározzuk a legkisebb költség megoldást.

A fogadó állomások szerint az oszlopminimumok összege 2+2+1+2=7 (DDCC). Ez az összes megoldások halmazára nézve a legkisebb költség, bár nem megengedett megoldás, vagyis az A és B szállítmányok nem kerülnek fogadó állomáshoz, a C és D viszont kétszer is számításba jön.
A vizsgált halmaz minimális költség megoldása azért érdekes, mert ha ez megengedett megoldás, akkor a késbbi részhalmaz vizsgálatokra esetleg már sor sem kerül, hiszen csak ennél jobb megoldást fogadunk el.
Négy részhalmazra bontjuk az össze megoldás halmazát. A részekre bontásnak egyértelm szabályon kell alapulnia. Most válasszuk azt, hogy az els fogadó állomás melyik szállítmányt fogadja.
A négy részhalmazt egyenként megvizsgáljuk.
A harmadik, C hozzárendelés minimális költsége 12 (CDBA, Z=3+2+3+4=12), és ez megengedett megoldás. Az A hozzárendeléshez tartozó minimális költség megoldása nem megengedett (ADCC, Z= 7+2+1+2=12), de értéke 12, azonos az eddig megtalált legalacsonyabb költség megoldáséval. Még nem zárhatjuk ki, hogy később meg kell vizsgálnunk ezt a részhalmazt, tartalmazhat alternatív megengedett megoldást.
A B és D hozzárendelés megoldáshalmazok minimális költség megoldásai (BDCC, Z=5+2+1+2=10) és (DACC,Z= 2+3+1+2=8) nem megengedettek ugyan, de vizsgálatot véngzünk, tartalmaznak-e kedvezbb megengedett megoldást, mint az eddig megtalált legjobb (CDBA, Z=12).

teljes halmaz min=7 (DDCC)

A... min=12 (A..DCC)	B... min=10(B..DCC)	C... min=12 (C..DBA)	D... min=8(D..ACC)
		tovább nem vizsgáljuk	

A feladat megoldását a D hozzárendelés részhalmaz elemzésével folytatjuk. Ezt a részhalmazt úgy kaptuk, hogy az els fogadó állomáshoz a D szállítmányt rendeltük. A második fogadó állomáshoz rendre A, B, C szállítmányokat rendelve kapjuk a részhalmazokra bontás következ szintjét.

D... min=8 (DACC)		
DA..CC min=8	DB..CC min=11	DC..BA min=12
		tovább nem vizsgáljuk

A részhalmazokhoz tartozó minimális költség megoldásokat elállítottuk, A DC hozzárendelés esetén megengedett megoldást eredményezett a legisebb költség megoldás (DCBA, Z=2+3+3+4=12). A DA és DB hozzárendeléssel létrehozott részhalmazok további vizsgálatra várnak. A DA részhalmaz vizsgálatával folytatjuk a feladat megoldását. Mint a következ ábrán láthatjuk, a DA részhalmazból két megengedett megoldás választható. A DABC hozzárendelés költsége Z=2+3+3+2=10, a DACB hez tartozó költség Z=2+3+1+5=11. DABC az eddig felfedezett legkisebb költséget eredményez megengedett megoldás. Az eddigi vizsgálatok alapján kijelenthetjük, hogy alacsonyabb költség megengedett megoldása nem létezik a feladatnak.

DA... min=8 (DACC)	
DABC min=10	DACB min=11
optimális megoldás	kizárva

DACB megoldást kizárjuk. Az eddigiek során vizsgálatra eljegyzett részhalmazok közül kizárjuk a vizsgálat alól a DB részhalmazt és az A részhalmazokat, mivel a hozájuk tartozó megoldások mind magasabb költséget eredményznének, mint Z=10. A C részhalmazhoz tartozó CDBA (Z=12) megoldást is elvetjük.

A B részhalmaz vizsgálatával a feladat feladat alternatív optimális megengedett megoldásait keressük. A B részhalmaz minmális költség megoldása nem megengedett, (BDCC, Z=5+2+1+2=10). A BA

részhalmaz minimális költség megoldása BACC, Z=5+3+1+2=11, a részhalmazt kizárjuk a további vizsgálatokból. BC részhalmaz minimális költség megoldása megengedett, de Z=5+3+3+4=15 értéke magasab, mint az eddig megtalált legjobb megoldásé (Z=10).
A BD részhalmazt tovább vizsgáljuk.

B... min=10(BDCC)

BA..CC min=11	BC..DA min=15	BD..CC min=10
kizárva	Tovább nem vizsgáljuk	

BD részhalmaz megengedett megoldásai BDAC (Z=5+2+4+2=13) és BDCA (Z=5+2+1+4=12). Mindkett kedveztlenebb, mint az eddigi legjobb megoldásunk.

BD... min=10 (BDCC)

BDAC min=13	BDCA min=12
kizárva	kizárva

A megoldások halmazát teljes egészében feldolgoztuk. Az optimális megoldás tehát DABC, Z=10.